А. А. Локшин, Е. А. Иванова,
М. М. Бахтин

ДИАГРАММЫ ЭЙЛЕРА
в элементарной математике

Учебное пособие

МАКС ПРЕСС

МОСКВА – 2022

УДК 512(075.8)
ББК 22.141я73
Л73

Локшин, Александр Александрович.

Л73 Диаграммы Эйлера в элементарной математике : учебное пособие / А. А. Локшин, Е. А. Иванова, М. М. Бахтин. – Москва: МАКС Пресс, 2022. – 96 с.

ISBN 978-5-317-06690-1

В пособии, представляющем собой существенно дополненную брошюру А. А. Локшина, Е. А. Ивановой и О. В. Бахтиной «Диаграммы Эйлера в комбинаторных и логических задачах», содержится более ста задач, ориентированных на развитие комбинаторного мышления, а также на отработку фундаментальных математических понятий «такой же» и «тот же самый», различие между которыми существенно для понимания основ теории множеств, излагаемой в начальной и средней школе. Более того, отработка упомянутых понятий закладывает, по мнению авторов, основы понятийного мышления у детей. (Как известно, по мнению Л. С. Выготского, формирование у ребенка понятийного мышления является одной из важнейших целей воспитания.) Предназначено для студентов педагогических вузов, будущих учителей математики и информатики в начальной школе. В настоящее издание добавлен ряд новых текстовых задач, предложенных М. М. Бахтиным.

УДК 512(075.8)
ББК 22.141я73

ISBN 978-5-317-06690-1

Содержание

Предисловие

В связи с изучением в начальной школе элементов наивной теории множеств обнаруживаются некоторые трудности [1] (см. в этой связи также [16]). Эти трудности возникают из-за употребления таких базовых для содержательной логики понятий как «тот же самый» и «такой же». Когда ребенок имеет дело с объемным материальным предметом, за которым может непрерывно наблюдать, путаницы между этими двумя понятиями не возникает. Но когда ученику приходится иметь дело не с самими предметами, а с их изображениями (на странице учебника или на мониторе компьютера), то, если не принять специальных мер предосторожности, такая путаница неизбежно возникает. Действительно, как различить две ситуации: а) дважды изображен один и тот же предмет; б) изображены два одинаковых предмета? (Некоторые предложения на этот счет содержатся в [1].)

Ситуация осложняется еще и тем, что в последние годы у «школьной» теории множеств появился влиятельный конкурент – развитая А.Л. Семеновым теория мешков [2], в которой ведущим отношением между объектами (содержащимися в мешках) является отношение *одинаковости*, тогда как в теории множеств ведущим является отношение *совпадения*.

Вопрос о том, как совместить теорию множеств с теорией мешков, далеко не тривиален [1]. Снять остроту проблемы могла бы, на наш взгляд, разработка специальных простых упражнений на усвоение разницы между понятиями «тот же самый» и «такой же». Такие упражнения никак не повредили бы усвоению понятий «множество» и «мешок» и препятствовали бы возникновению путаницы между двумя данными понятиями. На наш взгляд, диаграммы Эйлера представляют собой средство, идеально подходящее для избавления от этой путаницы.

Все упражнения комбинаторного характера, помещенные в пособие, привязаны к соответствующим диаграммам Эйлера и ориентированы именно на решение упомянутой выше проблемы.

Рассмотрим пример такого упражнения.

Пример.

Расположить на плоскости два обруча A и B, 3 прямоугольника (два одинаковых маленьких и один большой) и 3 треугольника (два одинаковых маленьких и один большой) так, чтобы:

а) все прямоугольники и все треугольники оказались внутри обручей;

б) внутри каждого обруча не было одинаковых фигур.

Решение этой задачи изображено на рис. 40. После того, как решение найдено, к нему могут быть поставлены вопросы:

Как правильно?

а) «Один и тот же маленький прямоугольник расположен внутри обручей A и B»;

б) «маленький прямоугольник внутри обруча A и маленький прямоугольник внутри обруча B – одинаковые»;

в) «большой прямоугольник внутри обруча A и большой прямоугольник внутри обруча B – одинаковые»;

г) «один и тот же большой прямоугольник находится внутри обруча A и внутри обруча B».

Авторы должны отметить, что при разработке данной темы на них оказали существенное влияние труды А.К. Звонкина [3] и А.А. Столяра (с соавторами) [4], а также математическая игра «Магические круги» [8].

Заметим, что отработка фундаментальных математических понятий «такой же» и «тот же самый» закладывает, по мнению авторов, основы понятийного мышления у детей. (Как известно, по мнению Л.С. Выготского, формирование у ребенка понятийного мышления является одной из важнейших целей воспитания.)

Заметим также, что трудности, возникающие у детей при необходимости отличить «тот же самый объект» от «точно такого же», наверняка связаны с тем, что понятие постоянного объекта не является для человека врожденным (см., например, [15]).

В настоящее издание включен новый (по сравнению с [17]) раздел 8, содержащий ряд текстовых задач, разработанных М.М. Бахтиным. Решение этих задач опирается на использование диаграмм Эйлера.

В заключение подчеркнем, что данное пособие адресовано, прежде всего, студентам педвузов – будущим учителям математики и информатики в начальной школе, но многие задачи вполне доступны детям, ученикам 3–4 классов.

Авторы признательны О.В. Бахтиной, внесшей существенный вклад в предыдущую версию книжки; по ее просьбе ее имя убрано с обложки настоящего издания.

Авторы,
Москва, январь 2017–2021

1. ЗАДАЧИ 1–42

Задача 1. Разместить на плоскости 3 обруча A, B, C и четыре маленьких прямоугольника так, чтобы все прямоугольники оказались внутри обручей и внутри каждого обруча оказалось по два прямоугольника.

Задача 2. Разместить на плоскости 3 обруча A, B, C и пять маленьких прямоугольников так, чтобы все прямоугольники оказались внутри обручей и внутри каждого обруча оказалось по три прямоугольника.

Задача 3. Разместить на плоскости 3 обруча A, B, C и пять маленьких прямоугольников так, чтобы все прямоугольники оказались внутри обручей и, кроме того, внутри A было вдвое меньше прямоугольников, чем внутри B и втрое меньше прямоугольников, чем внутри C.

Задача 4. Разместить на плоскости 3 обруча A, B, C и три маленьких прямоугольника так, чтобы все прямоугольники оказались внутри обручей, причем внутри каждого обруча было по два прямоугольника.

Задача 5. Разместить на плоскости 3 обруча A, B, C и семь маленьких треугольников так, чтобы все треугольники оказались внутри обручей, причем внутри каждого обруча было по пять треугольников.

Задача 6. Разместить на плоскости 3 обруча A, B, C и четыре маленьких треугольника так, чтобы все треугольники оказались внутри обручей и, кроме того, чтобы внутри обруча A оказалось в три раза больше треугольников, чем внутри обруча B и чем внутри обруча C. (Таким образом, внутри B и внутри C должно содержаться одинаковое количество треугольников.)

Задача 7. Разместить на плоскости 3 обруча A, B, C и четыре маленьких прямоугольника так, чтобы все прямоугольники оказались внутри обручей, причем внутри каждого обруча должно быть помещено по 2 прямоугольника и, кроме того, никакой прямоугольник не должен находиться одновременно внутри B и внутри C.

Задача 8. Разместить на плоскости 3 обруча A, B, C и шесть маленьких прямоугольников так, чтобы все прямоугольники оказались внутри обручей и внутри каждого обруча оказалось по три прямоугольника.

Задача 9. На плоскости размещены два обруча A и B и несколько маленьких шестиугольников. Все шестиугольники находятся внутри какого-нибудь обруча. Известно, что и внутри A и внутри B содержится по 2/3 от общего количества шестиугольников. Какое наименьшее количество шестиугольников могло быть размещено на плоскости?

Задача 10. На плоскости размещены два обруча A и B и несколько маленьких шестиугольников. Все шестиугольники находятся внутри какого-нибудь обруча. Известно, что и внутри обруча A, и внутри обруча B содержится по 3/4 от общего количества шестиугольников. Какое наименьшее количество шестиугольников могло быть размещено на плоскости?

Задача 11. На плоскости размещены два обруча A и B и несколько маленьких прямоугольников. Все прямоугольники находятся внутри какого-нибудь обруча. Известно, что внутри обруча A содержится 3/4 от общего количества прямоугольников, а внутри обруча B – половина от общего количества прямоугольников. Какое наименьшее количество прямоугольников могло быть размещено на плоскости?

Задача 12. На плоскости размещены два обруча A и B и несколько маленьких прямоугольников. Все прямоугольники находятся внутри какого-нибудь обруча. Известно, что внутри обруча A содержится 2/3 от общего количества прямоугольников, а внутри обруча В – половина от общего количества прямоугольников. Какое наименьшее количество прямоугольников могло быть размещено на плоскости?

Задача 13. На плоскости размещены три обруча А, В и С и несколько маленьких пятиугольников. Все пятиугольники находятся внутри какого-нибудь обруча. Известно, что внутри обруча А содержится 2/3 от общего количества пятиугольников, а внутри обруча В – половина от общего количества пятиугольников и внутри обруча С – половина от общего количества пятиугольников. Какое наименьшее количество пятиугольников могло быть размещено на плоскости?

Задача 14. Разместить на плоскости 2 обруча А и В и семь маленьких шестиугольников так, чтобы все шестиугольники оказались внутри обручей и, кроме того, внутри обруча А было втрое меньше шестиугольников, чем внутри обруча В.

Задача 15*. *Даны два обруча, А и В, а также написанные на карточках числа:* 1, 1, 3, 3, 5, 7, 9. *Требуется разместить на плоскости эти два обруча и карточки с числами так, чтобы были выполнены два условия:*

а) все карточки должны находиться внутри обручей,

б) сумма чисел внутри обруча А должна быть в три раза меньше суммы чисел внутри обруча В.

Задача 16*. *Даны два обруча, А и В, а также написанные на карточках числа:* 7, 9, 15, 27, 36, 63. *Требуется разместить на плоскости эти два обруча и карточки с числами так, чтобы были выполнены условия:*

а) все карточки должны находиться внутри обручей,

б) НОД (П', П'') = 3.

Здесь П' и П'' – произведения всех чисел, лежащих внутри обруча A и внутри обруча B соответственно.

Задача 17*. *Даны два обруча, A и B, а также написанные на карточках числа:* 2, 7, 9, 15, 27, 36, 63. *Требуется разместить на плоскости эти два обруча и карточки с числами так, чтобы были выполнены условия:*

а) все карточки должны находиться внутри обручей,

б) НОД (П', П'') = 6.

Здесь П' и П'' – произведения всех чисел, лежащих внутри обруча A и внутри обруча B соответственно.

Задача 18*. *Даны два обруча, A и B, а также написанные на карточках числа:* 2, 39, 9**S,* 27**T,* 55, 25**Q,* 125**R*. *Требуется разместить на плоскости эти два обруча и карточки с числами так, чтобы были выполнены условия:*

а) все карточки должны находиться внутри обручей,

б) НОД (П', П'') = 30*,*

в) внутри каждого обруча должно быть расположено одно и то же количество карточек.

Здесь П' – произведение всех чисел, лежащих внутри обруча A; П'' – произведение всех чисел, лежащих внутри обруча B; S, T, Q, R – попарно различные простые числа, большие 13.

Задача 19.** *Разместить на плоскости три обруча A, B, C и* 10 *прямоугольников так, чтобы*

1) число прямоугольников внутри обруча A составляло 2/9 от числа прямоугольников, расположенных внутри хотя бы одного из двух обручей B, C;

2) число прямоугольников внутри обруча B составляло 5/7 *от числа прямоугольников, расположенных внутри хотя бы одного из двух обручей A, C;*

3) число прямоугольников внутри обруча C было равно 6.

Задача 20. Можно ли так расположить на плоскости 2 обруча А и В и 11 маленьких звездочек, чтобы все звездочки оказались внутри обручей, и внутри каждого обруча содержалось по10 звездочек?

Задача 21. Разместить на плоскости 3 обруча А, В, С и восемь маленьких прямоугольников так, чтобы все прямоугольники оказались внутри обручей и внутри каждого обруча оказалось по четыре прямоугольника.

Задача 22. Можно ли так расположить на плоскости 2 обруча А и В и 10 маленьких ромбов, чтобы все ромбы оказались внутри обручей и внутри каждого обруча содержалось 3/5 от общего количества ромбов?

Задача 23. Можно ли так расположить на плоскости 2 обруча А и В и 9 маленьких звездочек, чтобы все звездочки оказались внутри обручей, и внутри каждого обруча содержалось 6 звездочек?

Ниже в задачах 24–31 приняты следующие обозначения: А, В, С – обручи, *a, b, c* – количества прямоугольников, расположенных внутри соответствующих обручей.

Задача 24. Расположить на плоскости два обруча А и В и пять маленьких прямоугольников так, чтобы все прямоугольники оказались внутри обручей и при этом НОК(a, b) = 3.

Задача 25. Расположить на плоскости два обруча А и В и шесть маленьких прямоугольников так, чтобы все прямоугольники оказались внутри обручей и при этом НОК(a, b) = 4.

Задача 26. Расположить на плоскости два обруча А и В и семь маленьких прямоугольников так, чтобы все прямоугольники оказались внутри обручей и при этом НОК(a, b) = 6.

Задача 27. Расположить на плоскости три обруча А, В, С и четыре маленьких прямоугольника так, чтобы все прямоугольники оказались внутри обручей и при этом НОК(a, b, c) = 2.

Задача 28. Расположить на плоскости три обруча А, В, С и четыре маленьких прямоугольника так, чтобы все прямоугольники оказались внутри обручей и при этом НОК(a, b, c) = 3.

Задача 29. Расположить на плоскости три обруча А, В, С и пять маленьких прямоугольников так, чтобы все прямоугольники оказались внутри обручей и при этом НОК(a, b, c) = 4.

Задача 30. Расположить на плоскости три обруча А, В, С и шесть маленьких прямоугольников так, чтобы все прямоугольники оказались внутри обручей и при этом НОК(a, b, c) = 3.

Задача 31. Расположить на плоскости три обруча А, В, С и семь маленьких прямоугольников так, чтобы все прямоугольники оказались внутри обручей и при этом НОК(a, b, c) = 4.

Ниже используются обозначения: S' – сумма чисел на карточках, расположенных внутри обруча А; S'' – сумма чисел на карточках, расположенных внутри обруча В; S''' – сумма чисел на карточках, расположенных внутри обруча С.

Задача 32. Расположить на плоскости три обруча А, В, С и четыре карточки с числами 1, 1, 2, 2 так, чтобы все карточки оказались внутри обручей и при этом НОК (S', S'', S''') = 2.

Задача 33. Расположить на плоскости три обруча А, В, С и пять карточек с числами 1, 1, 1, 2, 2 так, чтобы все карточки оказались внутри обручей и при этом НОК (S', S'', S''') = 3.

Задача 34. Расположить на плоскости три обруча A, B, C и пять карточек с числами 1, 1, 2, 2, 2 так, чтобы все карточки оказались внутри обручей и при этом НОК (S', S'', S''') = 4.

Задача 35. Расположить на плоскости три обруча A, B, C и шесть карточек с числами 1, 1, 1, 2, 2, 2 так, чтобы все карточки оказались внутри обручей и при этом НОК (S', S'', S''') = 5.

Задача 36. Расположить на плоскости три обруча A, B, C и семь карточек с числами 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 так, чтобы все карточки оказались внутри обручей и при этом НОК (S', S'', S''') = 4.

Задача 37. Расположить на плоскости три обруча A, B, C и восемь карточек с числами 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3 так, чтобы все карточки оказались внутри обручей и при этом НОК (S', S'', S''') = 4.

Задача 38. Расположить на плоскости три обруча A, B, C и, кроме того, шесть фигур: два квадрата – большой белый и маленький черный; два треугольника – большой черный и маленький белый; два круга – большой белый и маленький черный.

Все фигуры должны быть расположены внутри обручей, причем нужно удовлетворить следующим условиям:

а) внутри каждого обруча должны лежать ровно три фигуры, по одной фигуре каждой из трех форм (один квадрат, один треугольник и один круг);

б) одновременно внутри двух обручей могут находиться только черные фигуры.

Задача 39. Расположить на плоскости три обруча A, B, C и, кроме того, шесть фигур: два квадрата – большой белый (1) и маленький черный (2); два треугольника – большой черный (1) и маленький белый (5); два круга – большой белый (1) и маленький черный (0). В скобках указаны цифры, написанные на соответствующей фигуре.

Все фигуры должны быть расположены внутри обручей и, кроме того, нужно удовлетворить следующим условиям:

а) суммы чисел внутри каждого из обручей должны быть одинаковы;

б) внутри каждого обруча может располагаться не более четырех фигур.

Задача 40. *На плоскости расположены два обруча A и B и три прямоугольника так,что выполнены следующие условия:*

а) все прямоугольники расположены внутри обручей;

б) один и тот же прямоугольник расположен внутри обоих обручей;

в) внутри каждого обруча все прямоугольники одинаковые.

Может ли быть так, что:

1) один прямоугольник – синий, другой – красный, а третий – зеленый?

2) среди прямоугольников ровно два синих?

Задача 41. На плоскости расположены два обруча A и B так, как показано на рис. 41.

Соответствующие области на плоскости мы обозначим A\B, B\A и A∩B.

В области A\B расположено s камней, в области B\A расположено t камней, в области A∩B расположено w камней.

Играют двое, ходы делают по очереди. За один ход разрешается взять любое количество камней при условии, что все взятые камни расположены внутри одного и того же обруча. (При этом разрешается одновременно брать камни из областей A\B и A∩B, так как все такие камни лежат внутри обруча A; соответственно разрешается одновременно брать камни из областей B\A и A∩B, так как все такие камни лежат внутри обруча B.) Выигрывает тот, кто своим ходом забирает последний камень. Кто выигрывает при правильной игре – начинающий или продолжающий?

Задача 42. Расположить на плоскости три обруча A, B, C и пять карточек с написанными на них числами: 1, 9, 9, 3, 3 так, чтобы все карточки находились внутри обручей и, кроме того, были выполнены условия:

а) суммы чисел внутри всех обручей одинаковы;

б) внутри каждого обруча расположено не более трех карточек.

2. ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ К ЗАДАЧАМ 1–42

Ко всем приведенным ниже рисункам могут быть поставлены следующие вопросы:

а) Какие объекты, изображенные на рисунке, можно считать одинаковыми*?* (Термины «одинаковый» и «такой же» мы считаем синонимами.)

б) О каком объекте, изображенном на рисунке, и в каком контексте можно сказать «тот же самый», «этот же самый»?

в) Что позволяет нам отличать «тот же самый объект» от «такого же», но другого?

Замечание. Две плоские геометрические фигуры (два квадрата, два треугольника, два круга и др.) мы будем называть *одинаковыми*, если они

а) одного цвета;

б) могут быть полностью совмещены друг с другом, если их перемещать как твердые тела.

Задача 1. См. рис. 1.

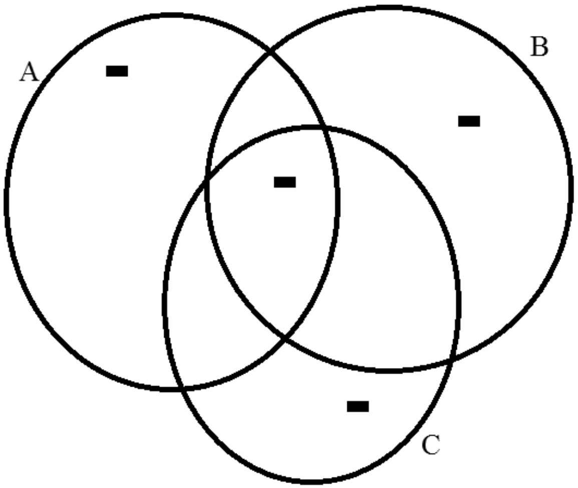

Рис. 1

Задача 2. См. рис. 2.

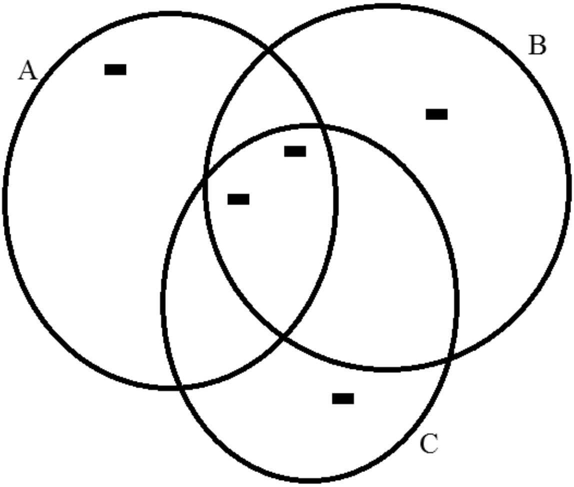

Рис. 2

Задача 3. См. рис. 3.

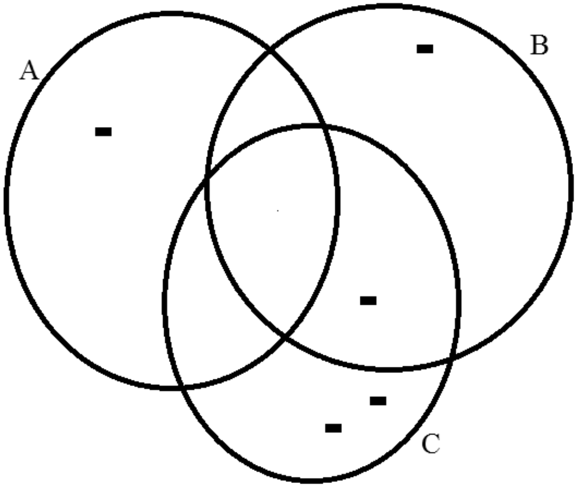

Рис. 3

Задача 4. См. рис. 4.

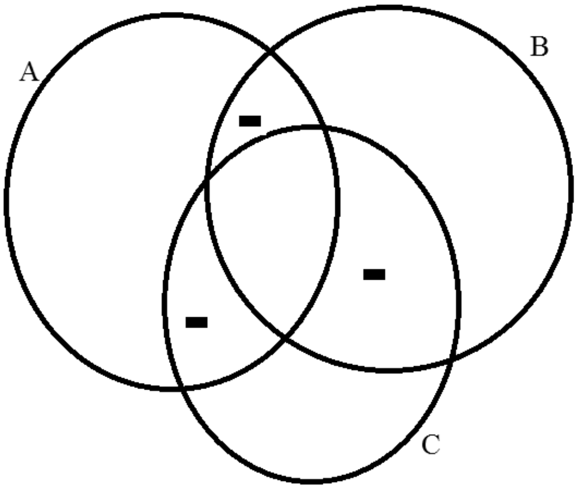

Рис. 4

Задача 5. См. рис. 5.

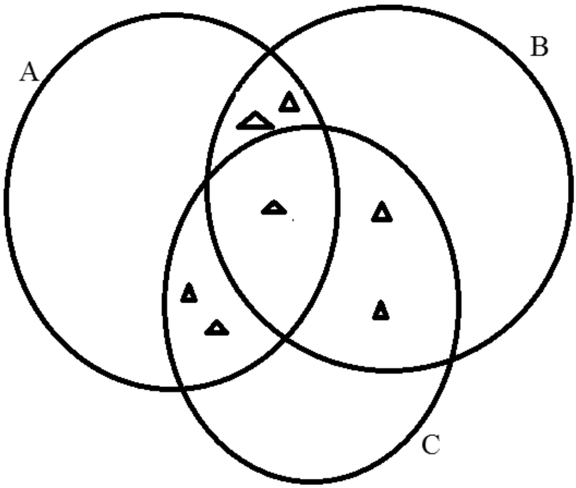

Рис. 5

Задача 6. См. рис. 6.

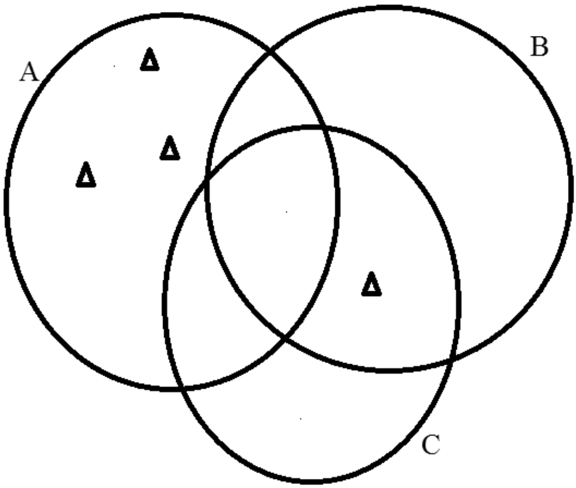

Рис. 6

Задача 7. См. рис. 7.

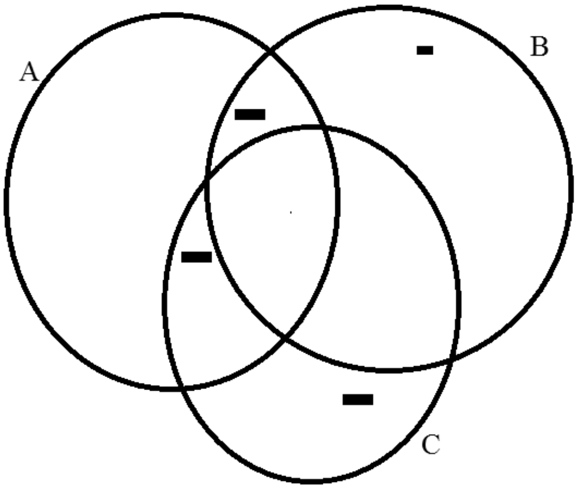

Рис. 7

Задача 8. См. рис. 8.

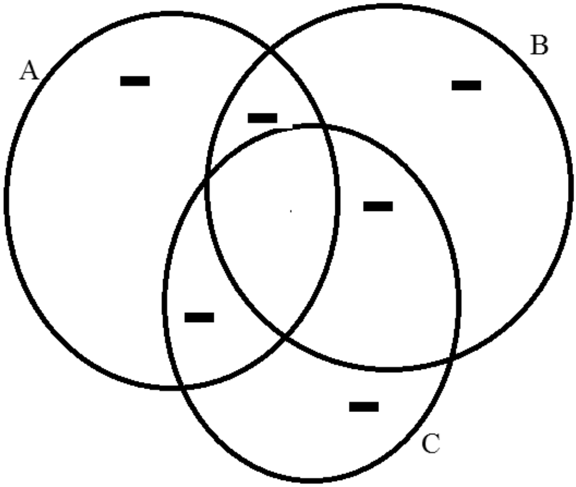

Рис. 8

Задача 9. См. рис. 9.

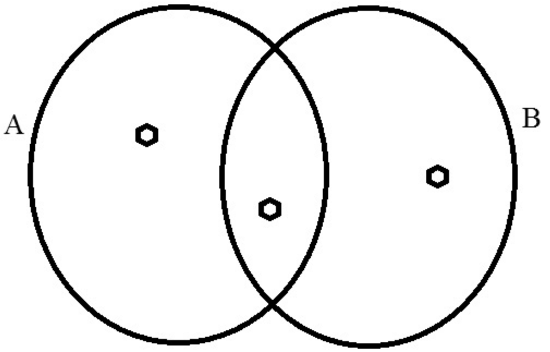

Рис. 9

Задача 10. См. рис. 10.

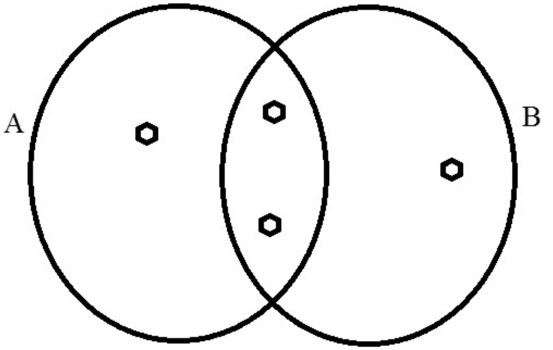

Рис. 10

Задача 11. См. рис. 11.

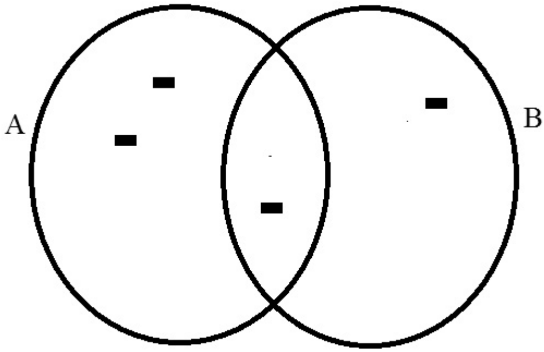

Рис. 11

Задача 12. См рис. 12.

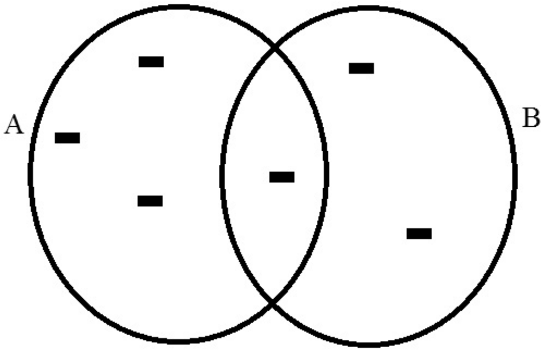

Рис. 12

Задача 13. См. рис. 13.

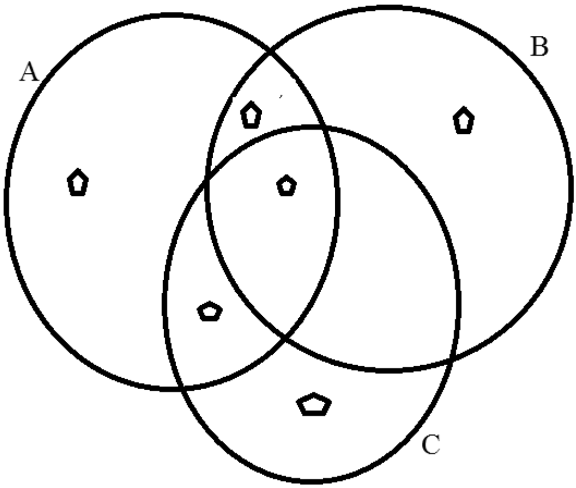

Рис. 13

Задача 14. См. рис. 14.

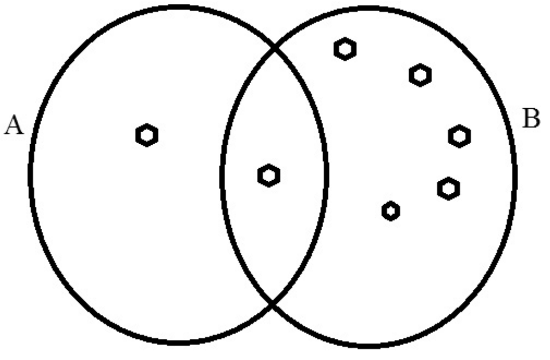

Рис. 14

Задача 15. *Даны два обруча, А и В, а также написанные на карточках числа:* 1, 1, 3, 3, 5, 7, 9. *Требуется разместить на плоскости эти два обруча и карточки с числами так, чтобы были выполнены два условия:*

а) все карточки должны находиться внутри обручей,

б) сумма чисел внутри обруча А должна быть в три раза меньше суммы чисел внутри обруча В.

Решение. Прежде всего, заметим, что эта задача решается обыкновенным перебором вариантов. Однако такое решение неинтересно. Кроме того, если рассмотреть аналогичную задачу, в которой участвует не семь, а, скажем, 20 карточек с числами, то прямой перебор вполне может стать затруднительным занятием.

Поэтому мы будем решать данную задачу при помощи следующих рассуждений. Сосчитаем сначала общую сумму всех чисел на карточках. Эта сумма в нашей задаче равна 29. Если бы обручи не налегали друг на друга, то сумма чисел внутри обруча А должна была бы быть равна одной четверти от 29. Но 29 на 4 нацело не делится. Значит, обручи пересекаются, и какая-то карточка (или какие-то карточки) обязательно лежит одновременно во внутренности обоих обручей. Ближайшее к 29 число, большее, чем 29, и притом делящееся на 4, – это 32. Поскольку $32 - 29 = 3$, проверяем, не лежит ли число 3 во внутренности обоих обручей.

Действительно, предположим, что число 3 (и только оно одно) лежит во внутренности обоих обручей. Обозначим через S' сумму чисел, лежащих внутри обруча А, а через S'' – сумму чисел, лежащих внутри обруча В. Тогда, очевидно, будем иметь

$$S' + S'' = 32,$$
$$S'' = 3S',$$

откуда легко получаем

$$S' = 8,$$
$$S'' = 24.$$

Из рис. 15 видно, что решение действительно найдено. Нетрудно проверить, что в данной задаче других решений нет.

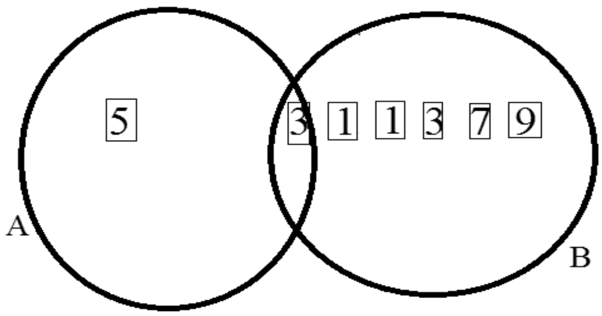

Рис. 15

Задача 16. См. рис. 16.

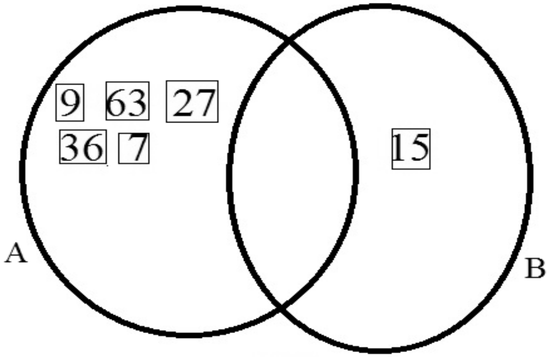

Рис. 16

Задача 17. См. рис. 17.

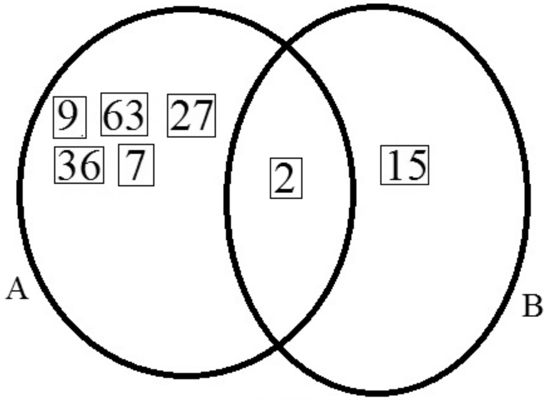

Рис. 17

Задача 18. См. рис. 18.

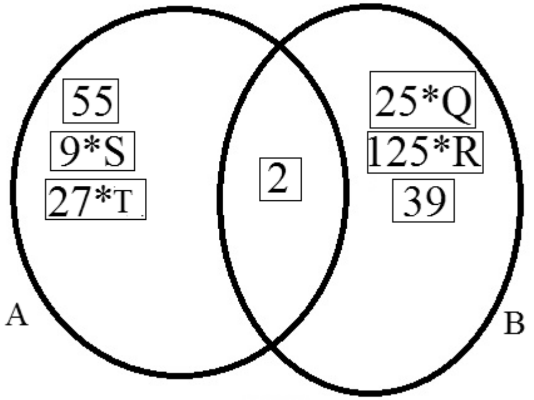

Рис. 18

Задача 19. См. рис. 19.

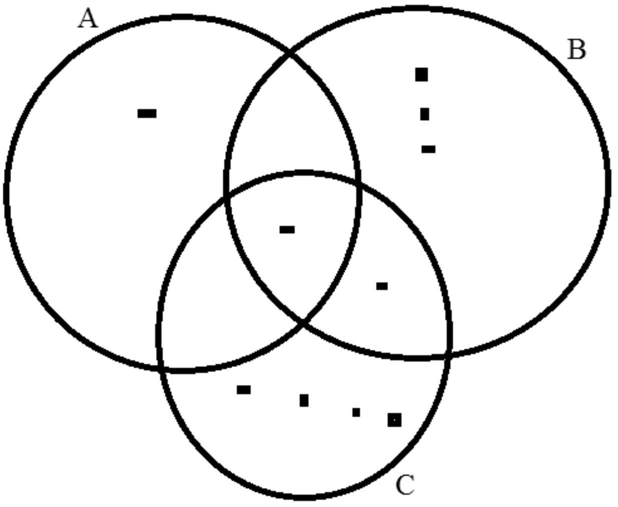

Рис. 19

Задача 20. См. рис. 20.

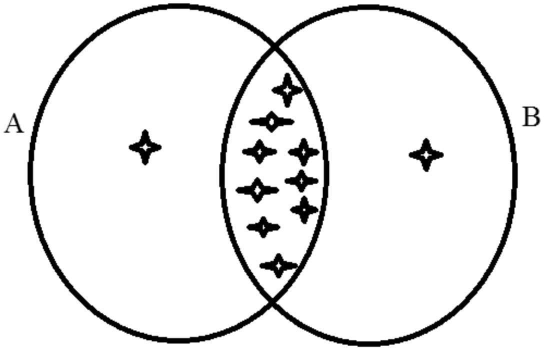

Рис. 20

Задача 21. См. рис. 21.

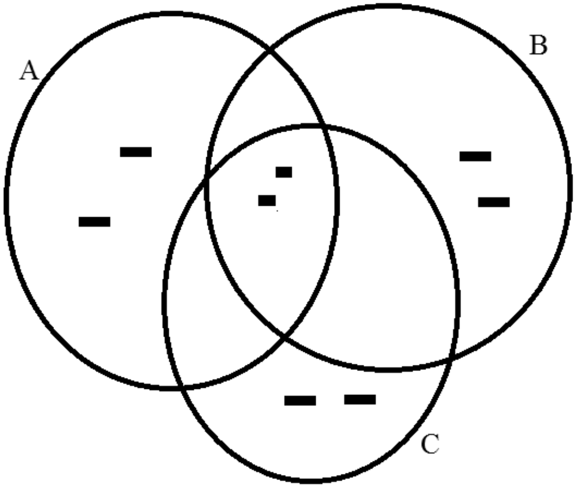

Рис. 21

Задача 22. См. рис. 22.

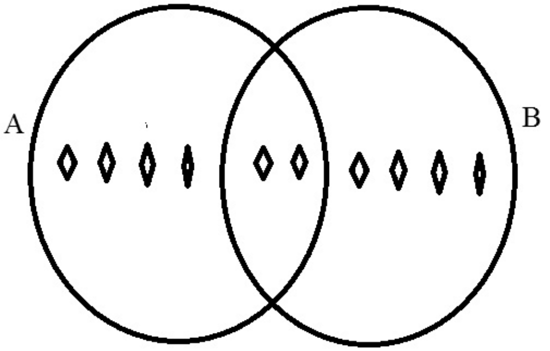

Рис. 22

Задача 23. См. рис. 23.

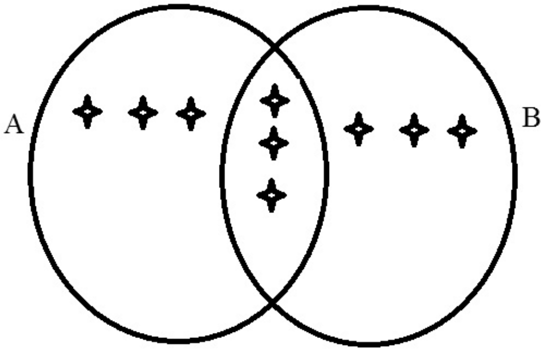

Рис. 23

Задача 24. См. рис. 24.

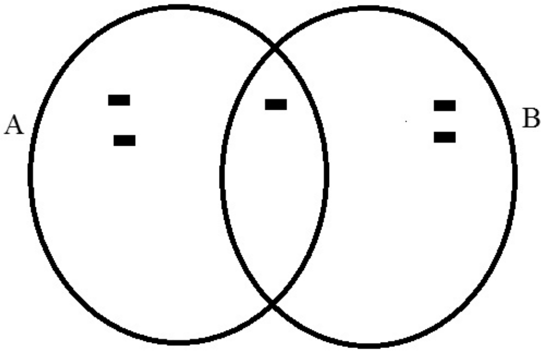

Рис. 24

Задача 25. См. рис. 25.

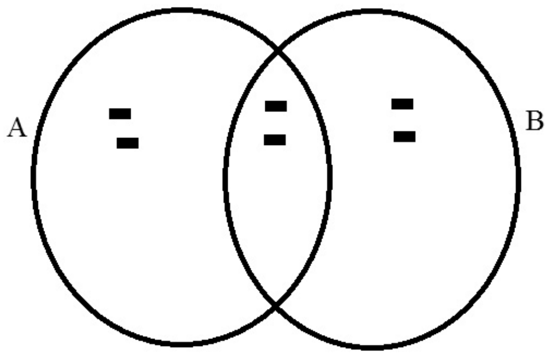

Рис. 25

Задача 26. См. рис. 26.

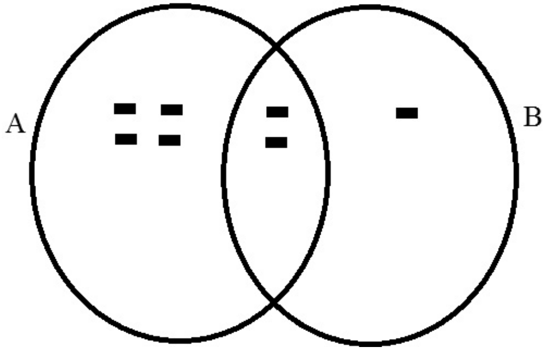

Рис. 26

Задача 27. См. рис. 27.

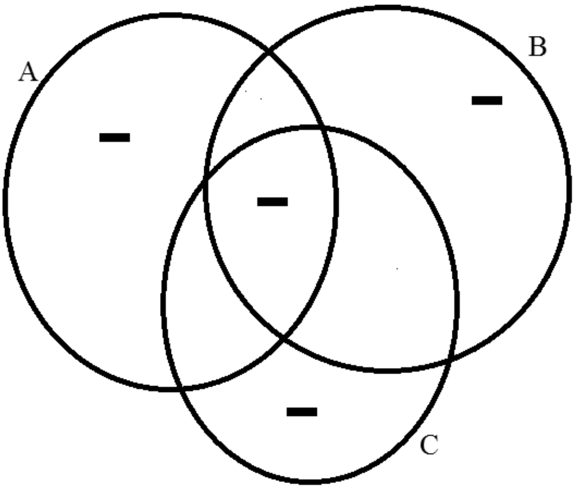

Рис. 27

Задача 28. См. рис. 28.

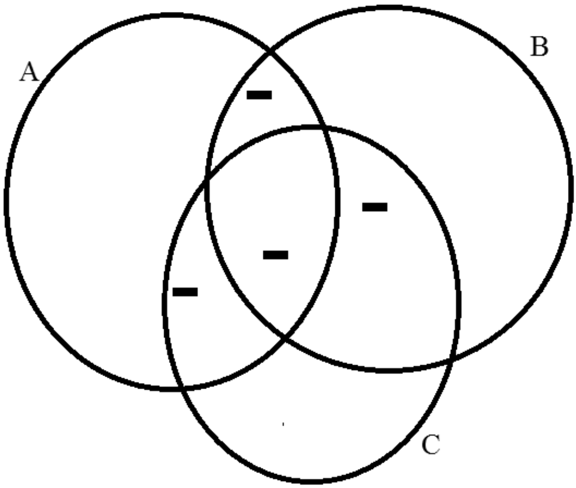

Рис. 28

Задача 29. См. рис. 29.

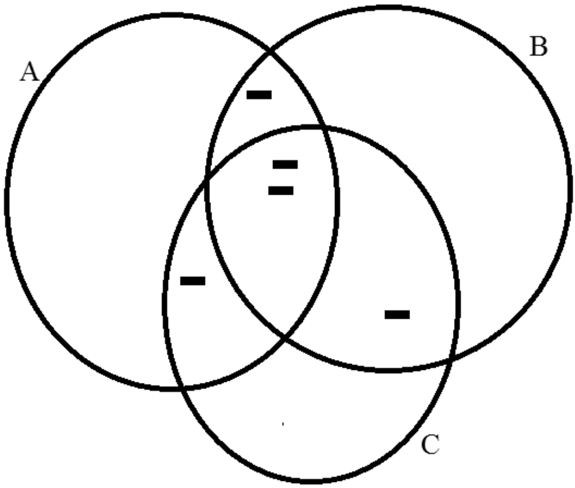

Рис. 29

Задача 30. См. рис. 30.

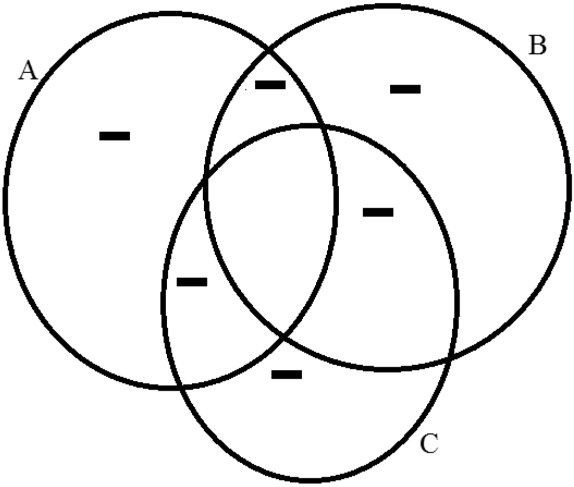

Рис. 30

Задача 31. См. рис. 31.

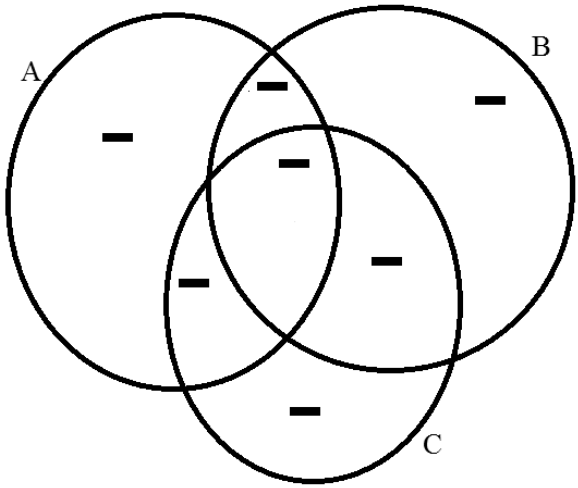

Рис. 31

Задача 32. См. рис. 32.

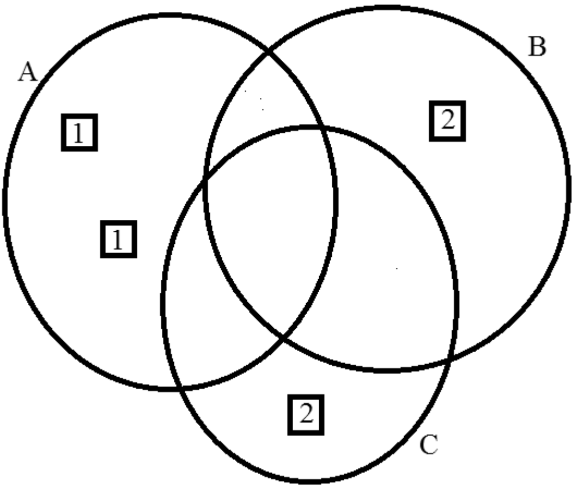

Рис. 32

Задача 33. См. рис. 33.

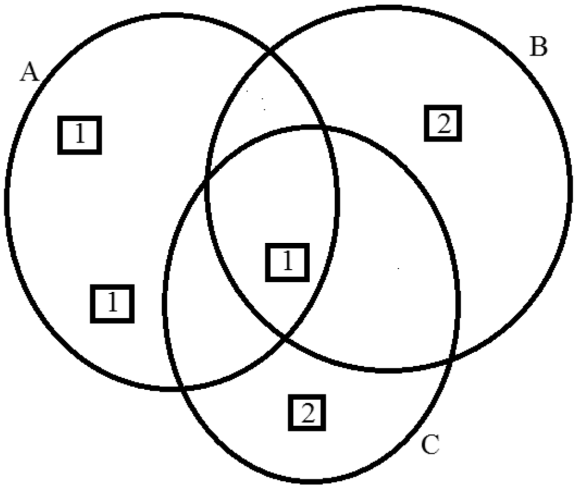

Рис. 33

Задача 34. См. рис. 34.

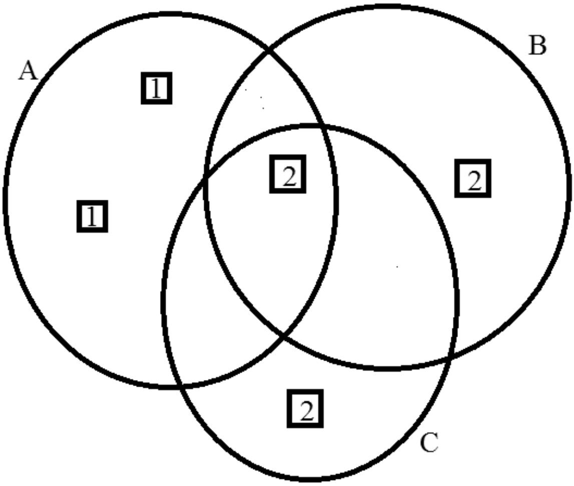

Рис. 34

Задача 35. См. рис. 35.

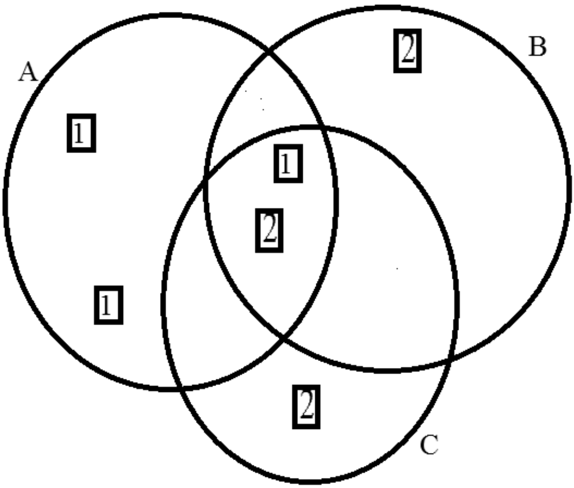

Рис. 35

Задача 36. См. рис. 36.

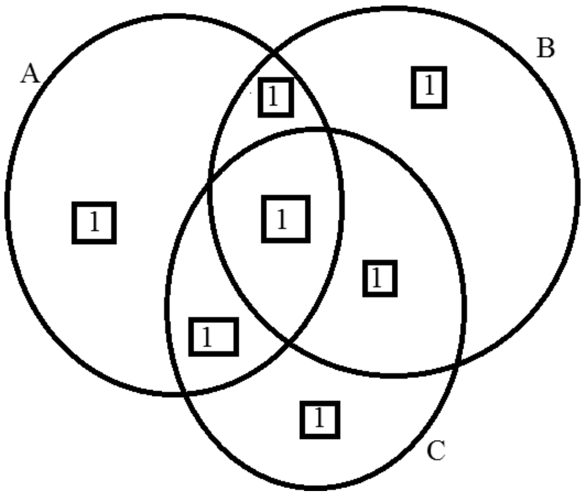

Рис. 36

Задача 37. См. рис. 37.

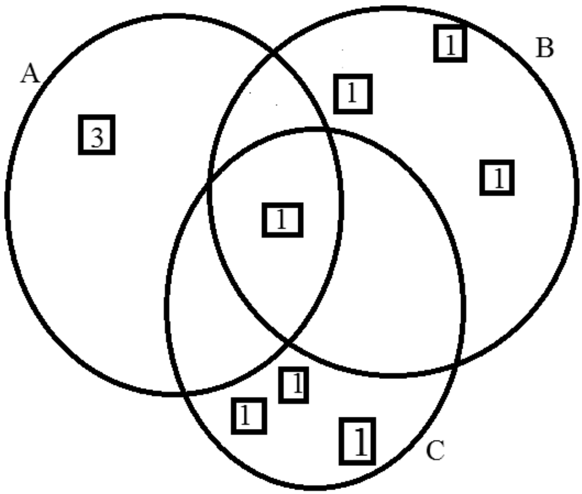

Рис. 37

Задача 38. См. рис. 38.

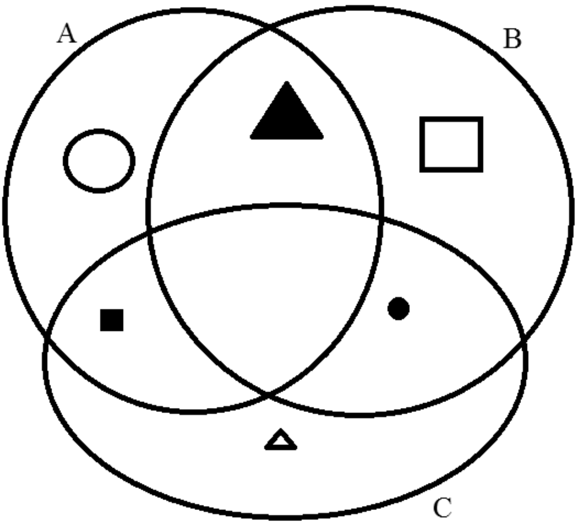

Рис. 38

Задача 39. См. рис. 39.

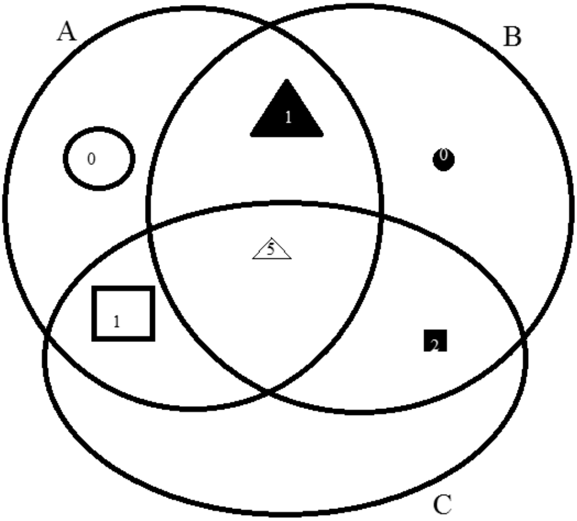

Рис. 39

Пример из Предисловия. См. рис. 40.

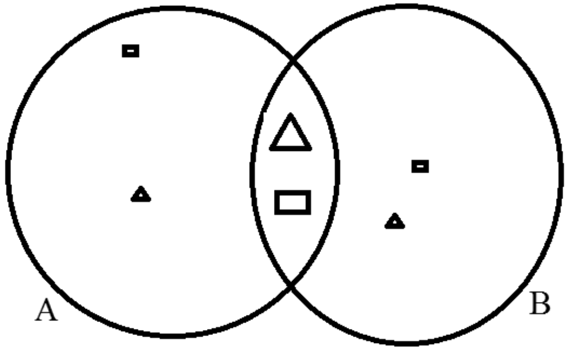

Рис. 40

Задача 41. См. рис. 41.

Указание. Методы, с помощью которых решаются подобные задачи, изложены в литературе по элементарной теории игр (см., например, книжку: Шень А. Игры и стратегии с точки зрения математики. – М.: МЦНМО, 2008). Детям, конечно, нужно предлагать эту задачу при конкретных небольших значениях параметров s, t, w.

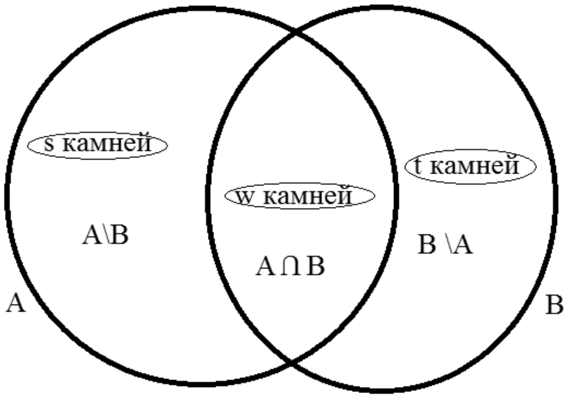

Рис. 41

Задача 42. У этой задачи два решения (см. рис. 42,а и 42,б). На рис. 42,б карточки с «девяткой» перевернуты.

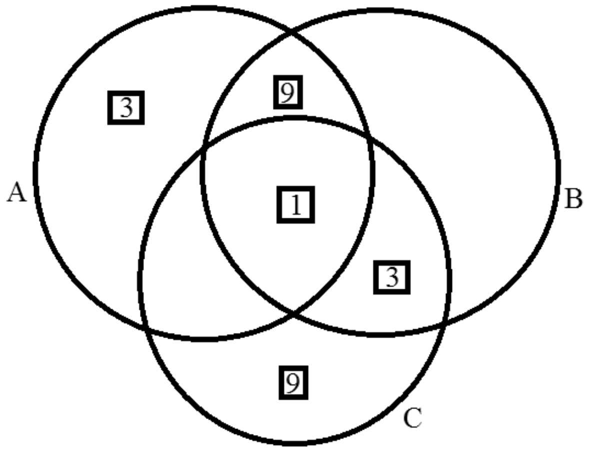

Рис. 42,а

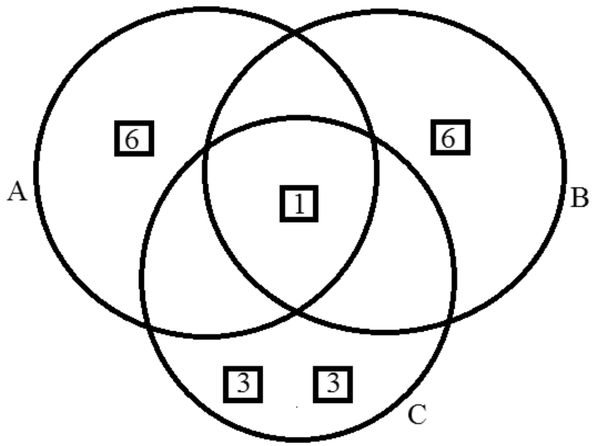

Рис. 42,б

3. ЗАДАЧИ 43–70

Задача 43. Даны два обруча A и B и маленькие стандартные прямоугольные карточки с написанными на них символами:

1, 2, 3, 5, + , + , +

(на каждой карточке написано по одному символу).

Расположить на плоскости обручи и карточки так, чтобы все карточки оказались внутри обручей, причем должны быть выполнены два условия:

а) совокупность карточек внутри каждого обруча образует корректную запись числового выражения;

б) значения обоих числовых выражений равны.

Задача 44. То же условие, что и в задаче 43, но на карточках написаны символы:

1, 2, 3, 10, : (знак деления), – , –

Задача 45. То же условие, что и в задаче 43, но на карточках написаны символы:

2, 5, 9, 14, : (знак деления), – , –

Задача 46. Даны три обруча A, B, C и маленькие стандартные прямоугольные карточки с написанными на них символами:

1, 1, 1, 3, 3

(на каждой карточке написано по одному символу).

Разместить на плоскости обручи и карточки так, чтобы все карточки оказались внутри обручей, причем должны быть выполнены следующие два условия:

а) внутри каждого обруча нет одинаковых карточек;

б) суммы чисел на карточках внутри обручей равны между собой.

Задача 47. То же условие, что в задаче 46, но теперь даны карточки с числами:

1, 1, 1, 3, 3, 7

(на каждой карточке написано по одному символу).

Задача 48. То же условие, что в задаче 46, но теперь даны карточки с числами:

1, 1, 1, 3, 3, 4, 4, 5, 5

(на каждой карточке написано по одному символу).

Задача 49. То же условие, что в задаче 46, но теперь даны карточки с числами:

1, 1, 1, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 7

(на каждой карточке написано по одному символу).

Задача 50. Даны три обруча и четыре одинаковые маленькие карточки.

Разместить обручи и карточки на плоскости так, чтобы внутри каждого обруча оказалось ровно две карточки.

Задача 51. Даны два обруча А и В и маленькие прямоугольные карточки с написанными на них числами:

1, 2, 2, 7, 7, 10

(на каждой карточке написано ровно одно число).

Разместить на плоскости обручи и карточки так, чтобы все карточки оказадись внутри обручей и, кроме того, были выполнены два условия:

а) внутри каждого из обручей нет одинаковых карточек;

б) сумма чисел на крточках внутри обруча В вдвое больше суммы чисел на карточках внутри обруча А.

Задача 52. Даны два обруча А и В и маленькие прямоугольные карточки с написанными на них числами:

1, 2, 2, 3 , 5, 5, 7, 7, 8

(на каждой карточке написано ровно одно число).

Разместить на плоскости обручи и карточки так, чтобы все карточки оказадись внутри обручей и, кроме того, были выполнены два условия:

а) внутри каждого из обручей нет одинаковых карточек;

б) сумма чисел на карточках внутри обруча В равна сумме чисел на карточках внутри обруча А.

Задача 53. Даны три обруча А, В, С и маленькие прямоугольные карточки с написанными на них числами:

1, 1, 3, 3 , 3, 4, 4, 4

(на каждой карточке написано ровно одно число).

Разместить на плоскости обручи и карточки так, чтобы все карточки оказадись внутри обручей и, кроме того, были выполнены два условия:

а) внутри каждого из обручей нет одинаковых карточек;

б) суммы чисел на карточках внутри обручей равны между собой.

Задача 54. Даны три обруча А, В, С и маленькие прямоугольные карточки с написанными на них числами:

1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 6

(на каждой карточке написано ровно одно число).

Разместить на плоскости обручи и карточки так, чтобы все карточки оказадись внутри обручей и, кроме того, были выполнены два условия:

а) внутри каждого из обручей нет одинаковых карточек;

б) $S_A + S_C = 8S_B$

(здесь через S_A, S_B, S_C обозначены суммы чисел на карточках внутри соответствующих обручей).

Задача 55. Даны три обруча А, В, С и маленькие прямоугольные карточки с написанными на них символами:

1, 2, 3, 4, 5, +, +, +, +

(на каждой карточке написан ровно один символ).

Разместить на плоскости обручи и карточки так, чтобы все карточки оказадись внутри обручей и, кроме того, были выполнены два условия:

а) карточки внутри каждого из обручей образуют осмысленную запись некоторого числового выражения;

б) $T_A + T_C = 2T_B$

(здесь через T_A, T_B, T_C обозначены числовые выражения, образованные карточками внутри соответствующих обручей).

Задача 56. Расположить на плоскости 3 обруча, 4 одинаковых маленьких квадрата и 4 одинаковых маленьких треугольника так, чтобы внутри каждого обруча оказалось в точности два квадрата и два треугольника.

Задача 57. Расположить на плоскости 3 обруча, 6 одинаковых маленьких ромбов и 4 одинаковых маленьких треугольника так, чтобы внутри каждого обруча оказалось в точности два ромба и два треугольника.

Задача 58. Даны три обруча и девять маленьких карточек с буквами:

a, a, a, b, b, b, c, c, c

(на каждой карточке написана одна буква).

Расположить на плоскости обручи и карточки с буквами так, чтобы выполнялись условия:

а) внутри каждого обруча содержатся ровно три пары одинаковых букв,

б) внутри каждого из обручей ни одна буква не встречается более двух раз.

Задача 59. Даны три обруча A, B, C и три карточки с числами

5, 5, 5 (на каждой карточке написано ровно одно число).

Расположить на плоскости обручи и карточки с числами так, чтобы все карточки оказалисть внутри обручей и, кроме того, сумма $S_A + S_B + S_C$ делилась бы на 7. (Здесь через S_A, S_B, S_C обозначены суммы чисел на карточках внутри соответствующих обручей).

Задача 60. Даны три обруча A, B, C и три карточки с числами

3, 3, 3 (на каждой карточке написано ровно одно число).

Расположить на плоскости обручи и карточки с числами так, чтобы все карточки оказалисть внутри обручей и, кроме того, сумма $S_A + S_B + S_C$ делилась бы на 7. (Здесь через

S_A, S_B, S_C обозначены суммы чисел на карточках внутри соответствующих обручей).

Задача 61. Даны три обруча A, B, C и три карточки с числами

4, 4, 4 (на каждой карточке написано ровно одно число).

Расположить на плоскости обручи и карточки с числами так, чтобы все карточки оказалисть внутри обручей и, кроме того, сумма $S_A + S_B + S_C$ делилась бы на 7. (Здесь через S_A, S_B, S_C обозначены суммы чисел на карточках внутри соответствующих обручей).

Задача 62. Даны три обруча A, B, C и четыре карточки с числами

5, 5, 5, 5

(на каждой карточке написано ровно одно число).

Расположить на плоскости обручи и карточки с числами так, чтобы все карточки оказалисть внутри обручей и, кроме того, сумма $S_A + S_B + S_C$ делилась бы на 7. (Здесь через S_A, S_B, S_C обозначены суммы чисел на карточках внутри соответствующих обручей).

Задача 63. Даны три обруча A, B, C и четыре карточки с числами

3, 3, 3, 3

(на каждой карточке написано ровно одно число).

Расположить на плоскости обручи и карточки с числами так, чтобы все карточки оказалисть внутри обручей и, кроме того, сумма $S_A + S_B + S_C$ делилась бы на 7. (Здесь через S_A, S_B, S_C обозначены суммы чисел на карточках внутри соответствующих обручей).

Задача 64. Даны три обруча A, B, C и четыре карточки с числами

4, 4, 4, 4

(на каждой карточке написано ровно одно число).

Расположить на плоскости обручи и карточки с числами так, чтобы все карточки оказалисть внутри обручей и, кроме того, сумма $S_A + S_B + S_C$ делилась бы на 7. (Здесь через S_A, S_B, S_C обозначены суммы чисел на карточках внутри соответствующих обручей).

Задача 65. Даны три обруча A, B, C и пять карточек с числами

13, 13, 13, 13, 13

(на каждой карточке написано ровно одно число).

Расположить на плоскости обручи и карточки с числами так, чтобы все карточки оказалисть внутри обручей и, кроме того, сумма $S_A + S_B + S_C$ делилась бы на 7. (Здесь через S_A, S_B, S_C обозначены суммы чисел на карточках внутри соответствующих обручей).

Залача 66. Даны три обруча A, B, C и три карточки с числами

3, 4, 5 (на каждой карточке написано ровно одно число).

Расположить на плоскости обручи и карточки с числами так, чтобы все карточки оказалисть внутри обручей и, кроме того, сумма $S_A + S_B + S_C$ делилась бы на 7. (Здесь через S_A, S_B, S_C обозначены суммы чисел на карточках внутри соответствующих обручей).

Задача 67. Даны двенадцать маленьких квадратных карточек с написанными на них номерами: 1, 2, 3, …, 12. Выложить из этих карточек равносторонний треугольник ABC так, чтобы на каждую сторону треугольника приходилось ровно пять карточек.

Задача 68. Даны три обруча и равносторонний треугольник, выложенный из двенадцати маленьких пронумерованных квадратных карточек (см. предыдущую задачу). Разместить на плоскости обручи и пронумерованные карточки так, чтобы внутрь первого обруча попали те и только те карточки, которые выложены вдоль стороны АВ треугольника АВС, внутрь второго обруча – те и только те карточки, которые выложены вдоль стороны ВС треугольника АВС, а внутрь третьего обруча – те и только те карточки, которые выложены вдоль стороны АС треугольника АВС.

Задача 69. К пяти граням кубика пришпилены маленькие карточки с числами: 1, 2, 3, 5, 6 (число 4 пропущено). Попробуйте разместить на плоскости эти карточки и три обруча А, В, С так, чтобы все карточки находились внутри обручей, причем внутри одного и того же обруча находились те и только те карточки, которые соприкасались друг с другом вдоль общего ребра кубика.

Задача 70. К шести граням кубика пришпилены маленькие карточки с числами: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Разместить на плоскости эти карточки и три обруча А, В, С так, чтобы все карточки находились внутри обручей, причем внутри одного и того же обруча находились те и только те карточки, которые не соприкасались друг с другом вдоль общего ребра кубика.

4. ДИАГРАММЫ ЭЙЛЕРА И ПРОВЕРКА ПРАВИЛЬНОСТИ ФОРМЫ УМОЗАКЛЮЧЕНИЙ

В этом разделе мы разберем несколько примеров применения диаграмм Эйлера к проверке правильности формы простейших умозаключений. Речь пойдет, прежде всего, о трех важнейших типах умозаключений (а именно: об утверждающем модусе, отрицающем модусе и законе силлогизма). Все эти три типа умозаключений в известной мере доступны младшим школьникам семи-восьми лет (см. [11]). Впрочем, как отмечается в [11], дети в этом возрасте плохо отличают “на слух” умозаключения правильной формы от внешне похожих на них умозаключений неправильной формы. Зрительное подкрепление законов логики, которое дают диаграммы Эйлера при надлежащем их истолковании учителем, могут, на наш взгляд, помочь детям в процессе формирования у них логического понятийного мышления (см. в этой связи также [12]).

Итак, приведем примеры трех вышеперечисленных типов умозаключений.

Три важнейших умозаключения правильной формы

1. Утверждающий модус

Если идет дождь, то Петя смотрит телевизор (*большая посылка*)

Идет дождь (*малая посылка*)

___

Петя смотрит телевизор (*вывод*)

2. Отрицающий модус

Если идет дождь, то Петя смотрит телевизор (*большая посылка*)

Петя не смотрит телевизор (*малая посылка*)

___

Дождь не идет (*вывод*)

3. Закон силлогизма

Если идет дождь, то Петя смотрит телевизор (*большая посылка*)

Если Петя смотрит телевизор, то он волнуется (*малая посылка*)

___

Если идет дождь, то Петя волнуется (*вывод*)

Приведем теперь три умозаключения неправильной формы, которые кажутся многим детям семи – восьми лет столь же законными, как и приведенные выше умозаключения правильной формы.

Три «умозаключения» неправильной формы

1'.

Если идет дождь, то Петя смотрит телевизор (*большая посылка*)

Петя смотрит телевизор (*малая посылка*)

___

Идет дождь (*неверный вывод*)

2'.

Если идет дождь, то Петя смотрит телевизор (*большая посылка*)

Дождь не идет (*малая посылка*)

___

Петя не смотрит телевизор (*неверный вывод*)

3'.

Если идет дождь, то Петя смотрит телевизор (*большая посылка*)

Если у Пети завтра контрольная, то он волнуется (*малая посылка*)

———

Если идет дождь, то Петя волнуется (*неверный вывод*)

Разберем теперь возможность применения диаграмм Эйлера к обоснованию правильности формы умозаключений типа 1–3 и неправильности формы «умозаключений» типа 1'–3'. Чтобы избежать ненужных повторов в рассуждениях, мы ограничимся рассмотрением примеров 1 и 1'.

Итак, нарисуем на листе бумаги маленький круг А; каждая точка внутри этого круга отвечает какой-то ситуации, когда идет дождь. (Точек внутри круга бесконечно много, точно так же существует бесконечно много ситуаций, когда мы можем утверждать, что идет дождь. Дождь может быть холодным, чуть потеплее, и т.д.)

Далее, нарисуем на том же листе бумаги большой круг В, каждая точка внутри которого отвечает некоторой ситуации, когда Петя смотрит телевизор. (Таких ситуаций, как и точек внутри большого круга, бесконечно много. Петя может сидеть рядом с телевизором, чуть подальше, еще чуть подальше и т.д.)

Для того, чтобы большая посылка в нашем Утверждающем модусе была истинной, нам необходимо было нарисовать круг В так, чтобы круг А оказался целиком внутри круга В. Действительно, пусть идет дождь, т.е. реализуется какая-то из возможных ситуаций, изображенных точками внутри круга А. Но, выбирая точку внутри А, мы автоматически оказываемся внутри круга В, и это значит, что «Петя смотрит телевизор». (При этом для нас не имеет значения, насколько далеко Петя расположился от экрана.)

Нетрудно видеть, что если бы мы на нашем рисунке нарушили требование, что круг А должен целиком содержаться внутри круга В, то тогда такой рисунок перестал бы соответствовать большой посылке нашего Утверждающего модуса.

Покажем теперь, как наш рисунок иллюстрирует правильность формы Утверждающего модуса (см. рис. 43).

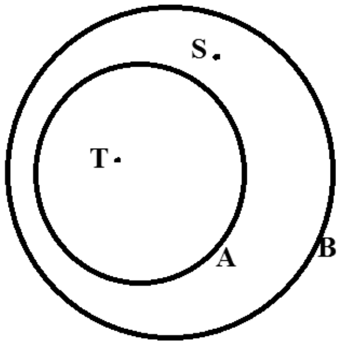

Рис. 43

Как мы уже было сказано выше, истинность большой посылки обеспечивается на нашем рисунке тем фактом, что круг А расположен целиком внутри круга В. Перейдем теперь к рассмотрению малой посылки («Идет дождь»). Истинность этой посылки означает, что мы должны выбрать какую-то точку Т внутри круга А. Какую бы точку Т внутри А мы ни выбрали, эта точка автоматически оказывается внутри круга В, что означает «Петя смотрит телевизор», т.е. **вывод Утверждающего модуса оказывается истинным всегда, независимо от того, какую точку Т внутри А мы выбрали**. Подчеркнем, что истинность вывода в Утверждающем модусе получена нами исходя исключительно из предположения об истинности обеих посылок, а не является сведением, полученным откуда-то еще.

Итак, рис. 43 иллюстрирует правильность формы Утверждающего модуса.

Покажем, как с помощью этого же рисунка можно обосновать неправильность формы «умозаключения» 1'.

Для этого достаточно, опираясь на рис. 43, показать, что истинность обеих посылок в «умозаключении»1' не гарантирует истинности вывода.

Действительно, истинность большой посылки в «умозаключении» 1' обеспечена на нашем рисунке тем геометрическим фактом, что круг A содержится внутри круга B. Перейдем теперь к малой посылке («Петя смотрит телевизор»). Так как мы считаем эту посылку тоже истинной, то нам необходимо выбрать какую-то точку внутри круга B. Однако мы не обладаем никакими дополнительными сведениями о том, при каких условиях Петя смотрит телевизор. Поэтому наш выбор точки внутри B не может быть ограничен каким-то дополнительным способом. Грубо говоря, мы должны перепробовать все точки внутри B и каждый раз получать истинный вывод. Но этого как раз и не происходит. Взяв точку S внутри B, но вне A, мы получим, что вывод, который предлагается в «умозаключении» 1' неверен. Это, в свою очередь, означает, что «умозаключением» 1' нельзя пользоваться в рассуждениях.

Аналогичным образом могут быть интерпретированы и проверены на диаграммах Эйлера остальные перечисленные выше умозаключения и «умозаключения».

Замечание. Подчеркнем, что предложенное выше использование графических моделей (диаграмм Эйлера) в качестве зрительной опоры для развития логики не предполагает знакомства с такими понятиями как «множество», «элемент множества», «квантор». Тем самым упомянутые модели оказываются, на наш взгляд, пригодными для работы с детьми младшего школьного возраста.

5. ДИАГРАММЫ ЭЙЛЕРА И РАСКРАСКИ

В этом разделе мы приведем две комбинаторные задачи, в формулировке которых сочетается использование диаграмм Эйлера с некоторыми идеями из курса «Математика и информатика» А.Л. Семенова (см. [2]). По мнению авторов, серии подобных задач должны способствовать умению организовывать перебор вариантов с учетом как **одинаковости** пересчитываемых объектов, так и возможного их **совпадения.**

Рассмотрим вначале следующий

Пример.

Нарисуем на плоскости две пересекающиеся окружности, которые будем обозначать через A и B соответственно, а внутри этих окружностей разместим шесть одинаковых фигурок -маленьких белых треугольников (см. рис. 44).

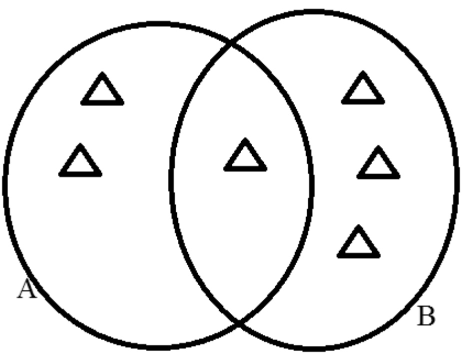

Рис. 44

Некоторые из этих треугольников мы будем закрашивать черным цветом и затем подсчитывать количество различных вариантов раскраски при условии, что два варианта раскраски считаются *эквивалентными,* если выполнены следующие два условия:

Условие 1. *Количество фигурок каждого цвета внутри A одно и то же при обоих вариантах раскраски.*

Условие 2. *Количество фигурок каждого цвета внутри B одно и то же при обоих вариантах раскраски.*

Таким образом, представленные на рис. 45–47 варианты раскраски эквивалентны друг другу (в вышеописанном смысле).

А на рис. 48 представлен вариант, не эквивалентный трем предыдущим.

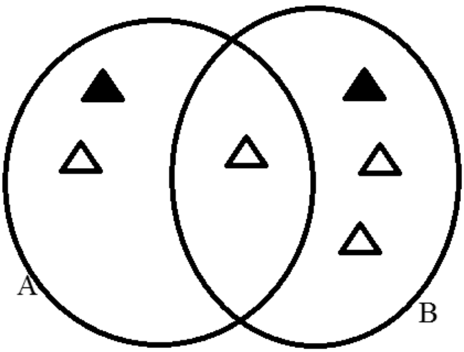

Рис. 45

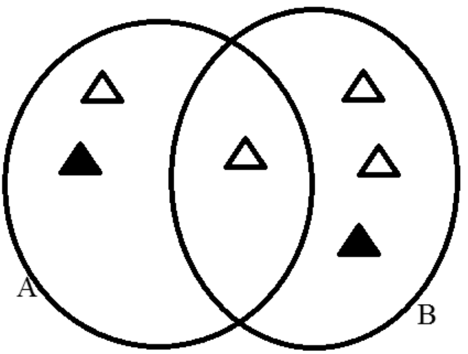

Рис. 46

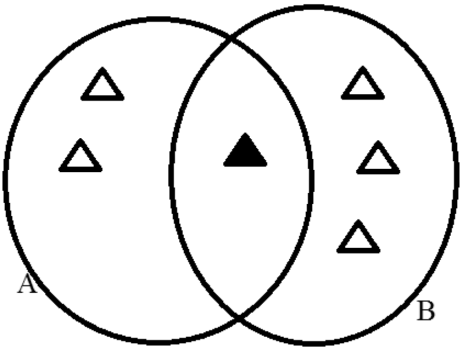

Рис. 47

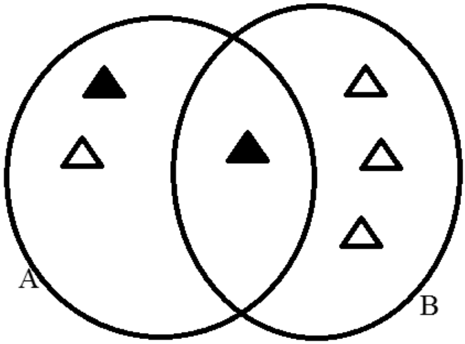

Рис. 48

Замечание. Если бы мы потребовали, чтобы выполнялось следующее дополнительное условие «Общее количество фигурок каждого цвета должно совпадать для двух эквивалентных раскрасок», то, очевидно, раскраску, представленную на рис.47, уже нельзя было бы считать эквивалентной раскраскам на рис. 45 и 46. Мы, однако, предпочитаем не налагать вышеупомянутого дополнительного условия, поскольку при этом условии задача перебора всех различных (попарно не эквивалентных друг другу) раскрасок становится менее интересной.

Задача 71. Сколько существует различных (попарно не эквивалентных друг другу) раскрасок для рис.44, если каждый треугольник может быть покрашен в один из трех цветов: белый, черный, красный?

Замечание. Ниже в задаче 72, в отличие от задачи 71, мы имеем дело с двумя сортами фигурок внутри окружностей, а в задаче 73 – не с двумя окружностями, а с тремя. Поэтому условия 1 и 2, гарантирующие эквивалентность двух раскрасок, должны быть переформулированы следующим образом.

Условие эквивалентности двух раскрасок. *Для фигурок каждого сорта количество фигурок каждого цвета внутри окружности A одно и то же при обоих вариантах раскраски; аналогичные условия должны выполняться для фигурок внутри окружности B, а также для фигурок внутри окружности C.*

Задача 72. Сколько существует различных (попарно не эквивалентных друг другу) раскрасок для рис. 49, если каждая фигурка внутри окружностей может быть покрашена в один из трех цветов: белый, черный, красный?

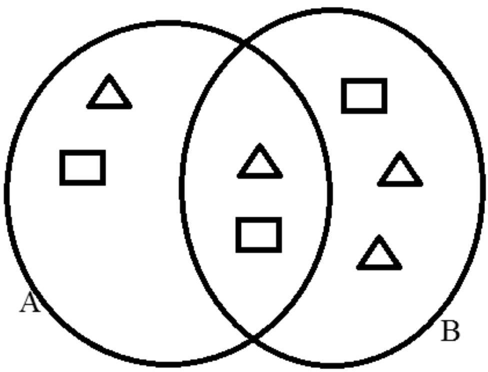

Рис. 49

Задача 73. а**)** Сколько существует различных (попарно не эквивалентных друг другу) раскрасок для рис.50, если каждый пятиугольник внутри окружностей может быть покрашен в один из двух цветов (белый, черный)?

б) Тот же вопрос, если цветов для раскраски – три (белый, красный, черный).

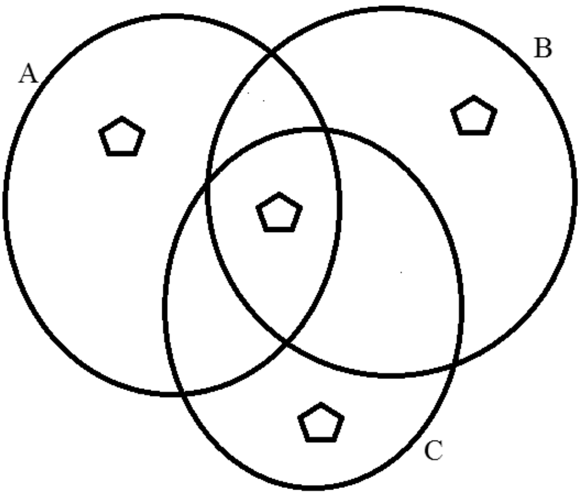

Рис. 50

6. ДИАГРАММЫ ЭЙЛЕРА И ЧИСЛОВОЙ ПЕРЕБОР

В этом разделе мы приведем постановку еще одной задачи, в которой требуется организовать рациональный перебор вариантов. Как и в предыдущем разделе, мы переносим некоторые идеи «теории мешков» А.Л.Семенова на случай диаграмм Эйлера. Итак, будем считать, что на плоскости расположены три обруча А, В, С (см. рис. 51).

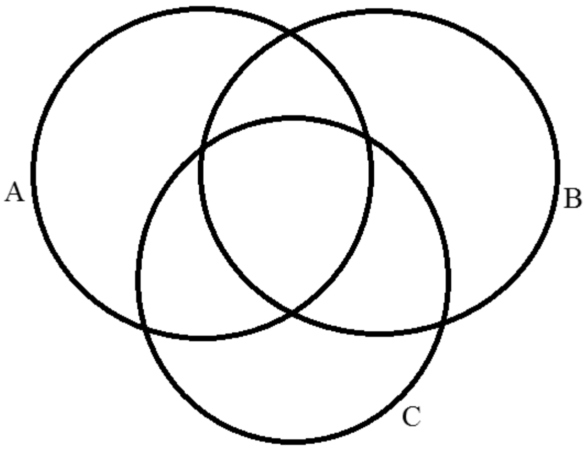

Рис. 51

Предположим далее, что в нашем распоряжении имеется достаточное для наших целей количество карточек, на каждой из которых написано одно из натуральных чисел 1, 2, 3, … *n.* Карточки, на которых написаны одинаковые числа, будем считать одинаковыми.

Поместим теперь несколько наших числовых карточек (среди которых могут встречаться одинаковые) внутрь обручей (см., например, рис. 52). Получившуюся в результате картинку будем называть *расположением числовых карточек.*

Два расположения числовых карточек будем называть эквивалентными, если внутри обруча A количество карточек каждого сорта одно и то же при обоих расположениях; аналогичные условия должны выполняться для карточек внутри обруча B, а также для карточек внутри обруча C.

Например, расположения числовых карточек на рис. 52 и 53 – эквивалентны друг другу.

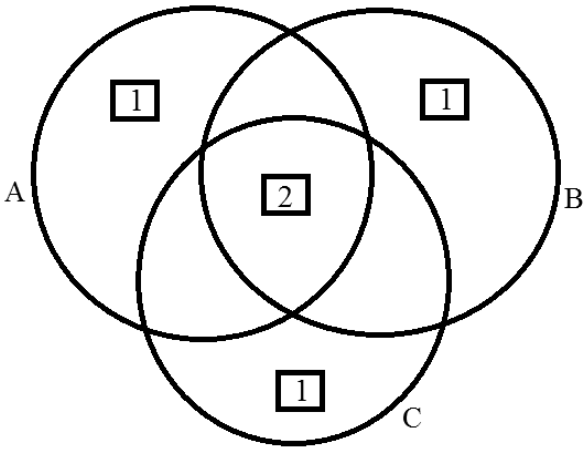

Рис. 52

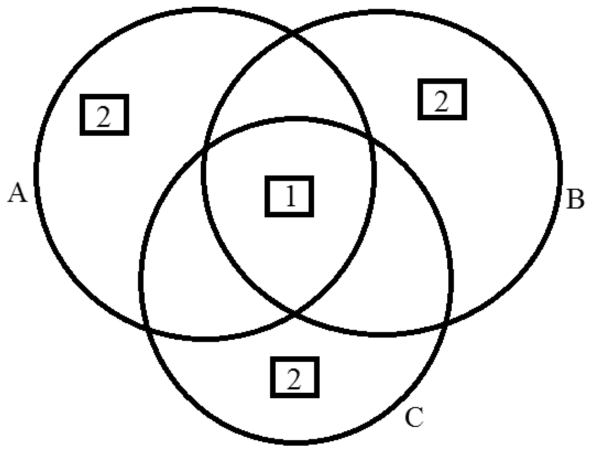

Рис. 53

Задача 74. Сколько существует различных (попарно не эквивалентных друг другу) расположений числовых карточек, при которых сумма чисел на карточках внутри обруча A равна 5, сумма чисел на карточках внутри B равна 6, а сумма чисел на карточках внутри C равна 7?

7. ТРИ ЗАДАЧИ НА ПЕРЕБОР ВАРИАНТОВ С УЧЕТОМ СКРЫТОЙ СИММЕТРИИ

В этом разделе мы приводим задачи, примыкающие по своему характеру к задачам из разделов 1 и 3, но требующие для своего решения несколько иного подхода.

Задача 75. Даны два больших обруча A и B и, кроме того, карточки треугольной и квадратной формы с написанными на них числами (см. рис. 54). Требуется разместить на плоскости обручи и карточки так, чтобы одновременно выполнялись три условия:

а) внутри обоих обручей содержалось одно и то же количество треугольных карточек;

б) внутри обоих обручей содержалось одно и то же количество квадратных карточек;

в) суммы чисел на карточках внутри обоих обручей были равны между собой.

(Класть все карточки одновременно внутрь обоих обручей запрещается.)

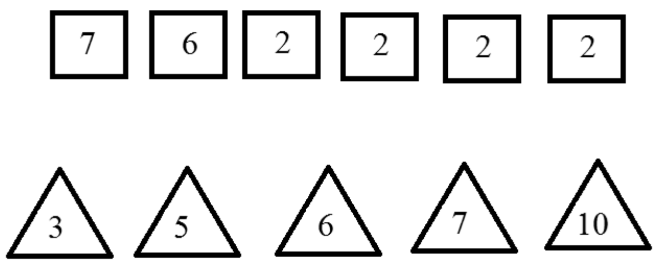

Рис. 54

Задача 76. Даны три больших обруча А, В, С и, кроме того, карточки треугольной и квадратной формы с написанными на них числами (см. рис. 55). Требуется разместить на плоскости обручи и карточки так, чтобы одновременно выполнялись три условия:

а) внутри каждого из обручей содержалось одно и то же количество треугольных карточек;

б) внутри каждого из обручей содержалось одно и то же количество квадратных карточек;

в) суммы чисел на карточках внутри каждого из обручей были равны между собой.

(Класть все карточки одновременно внутрь всех трех обручей запрещается.)

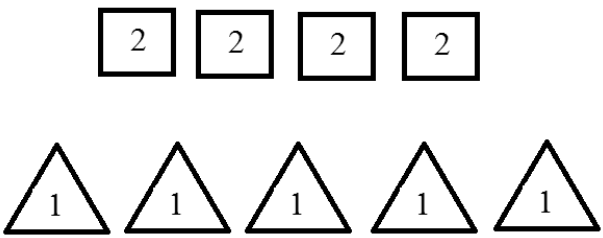

Рис. 55

Задача 77. То же условие, что и в предыдущей задаче, только числовые карточки изображены теперь на рис. 56.

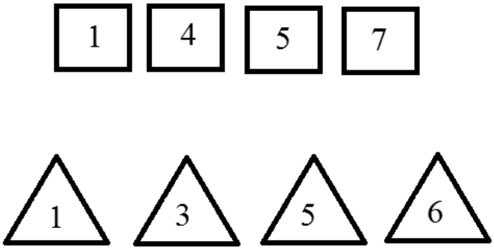

Рис. 56

8. НОВЫЕ ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

Задача 78. Из всех учеников школы только Маша и Катя входят одновременно в группу из шестидесяти самых лучших и в группу из семидесяти самых худших учеников. Сколько учеников в школе?

Задача 79. Из всех учеников школы только Маша и Катя не являются одновременными участниками группы из сорока самых лучших и группы из сорока самых худших учеников. Сколько учеников в школе?

Задача 80. Из всех учеников школы только Маша и Катя не являются одновременными участниками группы из тридцати самых лучших и группы из двадцати восьми самых худших учеников. Сколько учеников в школе?

Задача 81. Из всех учеников школы только Маша, Катя и Петя не являются одновременными участниками группы из тридцати самых лучших и группы из двадцати восьми самых худших учеников. Может ли так быть?

Задача 82. Из всех учеников школы только Маша, Катя, Петя и Вася не являются одновременными участниками группы из тридцати самых лучших и группы из двадцати восьми самых худших учеников. Сколько учеников в школе?

Задача 83. Из всех учеников школы только k детей не являются одновременными участниками группы из m самых лучших учеников и группы из n самых худших учеников. Сколько учеников в школе? При каких k, m, n задача имеет решение? (Предполагается, что множество детей, входящих одновременно в состав обеих групп, непусто.)

Решение. Обозначим через x число тех худших учеников, которые не вошли в состав m лучших учеников; через y – число тех лучших учеников, которые не вошли в состав n худших учеников; через z – число учеников, одновременно вошедших в состав m лучших и n худших учеников (см. рис. 57).

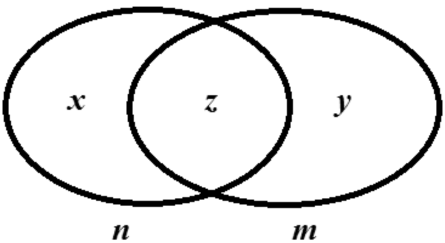

Рис. 57

Сразу же получаем систему из трех уравнений:

$x + y = k,$

$x + z = n,$

$y + z = m.$ (*)

Складывая два последних уравнения системы (*), имеем:

$x + y + 2z = n + m,$

откуда, учитывая первое уравнение системы (*), получаем:

$k + 2z = n + m,$

т.е.

$z = (n + m – k)/2.$

Подставляя найденное значение z в два последних уравнения системы (*), легко получаем:

$$x = n - (n + m - k)/2 = (n - m + k)/2,$$

$$y = m - (n + m - k)/2 = (m - n + k)/2. \qquad (**)$$

Таким образом, для того, чтобы поставленная задача имела решение, помимо очевидного требования неотрицательности чисел $(n + m - k)$, $(n - m + k)$ и $(m - n + k)$, необходимо еще потребовать, чтобы число k имело ту же четность, что и разность $\mathrm{n} - m$. (Последнее требование, очевидно, эквивалентно тому, что k должно иметь ту же четность, что и сумма $n + m$.)

Задача 84. В школе все ученики занимаются хотя бы одним из трех видов спорта. При этом:

– только Петя входит одновременно в состав 40 футболистов и 40 баскетболистов;

– только Вася и Гриша входят одновременно в состав 40 баскетболистов и 40 шахматистов;

– только Саша, Алеша и Миша входят одновременно в состав 40 шахматистов и 40 футболистов.

Сколько учеников в школе?

Задача 85. В школе все ученики занимаются хотя бы одним из трех видов спорта. При этом:

– только один ученик не является одновременным участником группы из 40 футболистов и группы из 39 баскетболистов;

– только трое учеников не являются одновременными участниками группы из 39 баскетболистов и группы из 38 шахматистов;

– только двое учеников не являются одновременными участниками группы из 38 шахматистов и группы из 40 футболистов.

Сколько учеников в школе?

Задача 86. В лицее с углубленным изучением иностранных языков только один Петя не является одновременным участником группы из сорока учеников, изучающих английский язык, и группы из 39 учеников, изучающих французский язык. Кроме того, только Вася, Маша и Галя не являются одновременными участниками группы из 39 учеников, изучающих испанский язык, и группы из 37 учеников, изучающих японский язык. Сколько учеников в лицее?

Задача 87. Известно, что в лицее с углубленным изучением иностранных языков:

А) только один Петя одновременно входит в состав группы из сорока пяти учеников, изучающих английский язык, и в состав группы из 36 учеников, изучающих французский язык;

Б) при этом только Вася, Маша и Галя не являются одновременными участниками группы из 79 учеников, изучающих испанский язык, и группы из 77 учеников, изучающих японский язык.

Сколько учеников в лицее?

Решение. Из условия А) следует, что в лицее не меньше 80 человек, а из условия Б) – что в лицее ровно 80 человек. Итак, условия не противоречат друг другу, и в лицее учится 80 человек.

Задача 88. В школе все дети изучают хотя бы один из двух иностранных языков – французский или английский. При этом 40 человек изучают английский, а 34 – французский. Известно также, что произведение числа детей, изучающих только английский, на число детей, изучающих только французский, равно 7. Сколько учеников в школе?

Задача 89. В школе все дети изучают хотя бы один из двух иностранных языков – французский или английский. При этом 40 человек изучают английский, а 34 – французский. Известно также, что произведение числа детей, изучающих только английский, на число детей, изучающих только французский, равно 16. Сколько учеников в школе?

Решение. Из условия задачи легко следует, что разность между числом детей, изучающих только английский, и числом детей, изучающих только французский, должна равняться 6. Таким образом, нам нужно представить число 16 в виде произведения двух множителей, разность между которыми равна 6. Очевидно, что единственное представление числа 16 в таком виде – это $16 = 8\times2$. Отсюда заключаем, что число детей, изучающих только французский, равно 2. Теперь ясно, что общее число детей в школе равно $40 + 2 = 42$.

Задача 90. В школе учится всего 40 детей, причем каждый из них изучает хотя бы один из двух иностранных языков – французский или английский. При этом произведение числа детей, изучающих только английский, на число детей, изучающих только французский, равно 13. Сколько детей изучают оба языка?

Задача 91. В школе учится всего 40 детей, причем каждый из них изучает хотя бы один из двух иностранных языков – французский или английский. При этом произведение числа детей, изучающих только английский, на число детей, изучающих только французский, равно 169. Сколько детей изучают оба языка?

Задача 92. В классе учится всего 10 детей, причем каждый из них изучает хотя бы один из двух иностранных языков – французский или английский. При этом произведение числа детей, изучающих только английский, на число детей, изучающих только французский, равно 20. Сколько детей изучают оба языка?

Задача 92а. В классе каждый ребенок изучает хотя бы один из двух иностранных языков – французский или английский. При этом число детей, изучающих только один язык, составляет 8/13 от числа детей, изучающих оба языка. Известно также, что число детей в классе не больше 40. Сколько детей учится в классе?

Задача 93. В классе все ученики изучают по крайней мере один из двух иностранных языков – испанский или итальянский. При этом произведение трех чисел: числа учеников, изучающих только испанский, числа учеников, изучающих только итальянский, и числа учеников, изучающих оба эти языка, равно 29. Сколько учеников в классе?

Задача 94. На плоскости нарисовали три окружности, разбивающие ее на максимально возможное количество областей. Затем внутри каждой из образовавшихся областей отметили некоторое количество точек. После чего вычислили произведение количеств отмеченных точек и получили число 13. Сколько точек отметили на плоскости?

Задача 95. На плоскости нарисовали три окружности, разбивающие ее на максимально возможное количество областей. Затем внутри каждой из образовавшихся областей отметили некоторое количество точек, причем всего отмеченных точек было не больше пятидесяти. После чего вычислили произведение количеств отмеченных точек и получили число 49. Сколько точек отметили на плоскости?

Задача 96. На плоскости нарисовали четыре овала, разбивающие ее на 16 областей (попробуйте сделать это!). Затем внутри каждой из образовавшихся областей отметили некоторое количество точек. После чего вычислили произведение количеств отмеченных точек и получили число 13. Сколько точек отметили на плоскости?

Задача 97. На плоскости нарисовали четыре овала, разбивающие ее на 16 областей. Затем внутри каждой из образовавшихся областей отметили некоторое количество точек, причем всего отмеченных точек было не больше пятидесяти. После чего вычислили произведение количеств отмеченных точек и получили число 49. Сколько точек отметили на плоскости?

Задача 98. На плоскости нарисовали четыре овала, разбивающие ее на 16 областей. Затем внутри каждой из образовавшихся областей отметили некоторое количество точек. После чего вычислили произведение количеств отмеченных точек и получили число 1024. Какое наименьшее количество точек могло быть отмечено на плоскости?

Задача 99. На плоскости нарисовали две окружности так, что они разбивают ее на четыре области. Затем внутри каждой из образовавшихся областей отметили некоторое количество точек. После чего вычислили произведение количеств отмеченных точек и получили число 210. Какое наименьшее число точек могли отметить?

Задача 100. На плоскости нарисовали две окружности так, что они разбивают ее на четыре области. Затем внутри каждой из образовавшихся областей отметили некоторое количество точек. После чего вычислили произведение количеств отмеченных точек и получили число 770. Какое наименьшее число точек могли отметить?

Задача 101. На плоскости расположены два обруча и две маленькие фишки. Два расположения обручей и фишек считаем *одинаковыми*, если из одного расположения можно перейти в другое, непрерывно перемещая обручи и фишки так, что фишки не перепрыгивают через обручи. Требуется выяснить, сколько существует *различных* расположений на плоскости двух обручей и двух фишек, если:

А) обручи разные (один красный, другой синий) и фишки разные (одна желтая, другая зеленая);

Б) обручи одинаковые и фишки одинаковые;

В) обручи разные, а фишки одинаковые;

Г) обручи одинаковые, а фишки разные.

Замечание. При установлении одинаковости расположения перечисленных предметов мы пренебрегаем тем, что один обруч может налегать на другой. Аналогичного соглашения мы придерживаемся и в следующей задаче.

Задача 102. На плоскости расположены три обруча и две маленькие фишки. Требуется выяснить, сколько существует *различных* (см. задачу 101) расположений на плоскости этих обручей и фишек, если:

А) все обручи разные и фишки разные;

Б) все обручи одинаковые и фишки одинаковые;

В) все обручи разные, а фишки одинаковые;

Г) все обручи одинаковые, а фишки разные.

Литература

1. Локшин А.А. Мешки, множества и математика для детей. – М.: МАКС Пресс, 2015.

2. Семенов А.Л., Рудченко Т.А. Математика и информатика. 3 класс. Ч. 1. – М., 2011.

3. Звонкин А.К. Малыши и математика. – М.: МЦНМО, 2006.

4. Столяр А.А. и др. Формирование элементарных математических представлений у дошкольников. – М.: Просвещение, 1988.

5. Локшин А.А. Об использовании понятий *мешок* и *множество*/ Начальная школа, 2015, № 3, с. 90–93.

6. Локшин А.А., Иванова Е.А. Математическая смесь, изд. 3. – М.: МАКС Пресс, 2016.

7. Локшин А.А., Иванова Е.А. О преподавании элементов теории множеств в начальной школе / Начальная школа, 2016, № 4.

8. http://www.umapalata.com/design_ru/games/UP_Krugi.asp?file=UP_Krugi.swf

9. Выготский Л.С. Собрание сочинений в 6 т., т. 2, М., 1982.

10. Ясюкова Л.А. Проблемы психологии понятийного мышления / Вестник Санкт- Петербургского университета (сер. 12). 2010, вып. 3, с. 385–394. http://resurs-yar.ru/files/5_1.pdf

11. Лоренцо О., Мачадо А. В защиту теории Пиаже: ответ на десять основных пунктов критики // Жан Пиаже: теория, эксперименты, дискуссии. – М.: Гардарики, 2001, с. 498–499.

12. Мерзон А.Е., Добротворский А.С., Чекин А.Л. Пособие по математике для студентов факультетов начальных классов. – М., 1998.

13. Босова Л.Л., Босова А.Ю., Коломенская Ю.Г. Занимательные задачи по информатике. – М., 2014, с. 37.

14. Из сумки «Кенгуру». Задачи и решения. Вып. 2. – М., 2014, с. 9 и 37.

15. Пиаже Ж. Теория Пиаже // Жан Пиаже: теория, эксперименты, дискуссии. – М.: Гардарики, 2001, с. 123.

16. Выготский Л.С., Лурия А.Р. Этюды по истории поведения. – М.: Педагогика-Пресс, 1993, с. 148, 186–187.

17. Локшин А.А., Иванова Е.А., Бахтина О.В. Диаграммы Эйлера в комбинаторных и логических задачах. – М.: МАКС Пресс, 2017.

Учебное издание

Локшин Александр Александрович
Иванова Елена Алексеевна
Бахтин Михаил Михайлович

ДИАГРАММЫ ЭЙЛЕРА
в элементарной математике

Подготовка оригинал-макета:
Издательство «МАКС Пресс»
Главный редактор: *Е. М. Бугачева*
Компьютерная верстка: *Н. С. Давыдова*
Обложка: *М. А. Еронина*

В издании использованы рисунки А. А. Локшина

Подписано в печать 20.10.2021 г.
Формат 84x108 1/16. Усл. печ. л. 10,08.
Тираж 25 экз. Изд. № 153.

Издательство ООО «МАКС Пресс».
Лицензия ИД N 00510 от 01.12.99 г.
119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы,
МГУ имени М.В. Ломоносова, 2-й учебный корпус, 527 к.
Тел.8(495) 939-3890/93. Тел./Факс 8(495) 939-3891.

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных материалов в ООО «Фотоэксперт»
115201, г. Москва, ул. Котляковская, д.3, стр. 13.